ДОКТОРСКИЕ ДИССЕРТАЦИИ

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

С. Н. Мергелян

17 февраля 1949 г. в Математическом институте АН СССР им. В. А. Стеклова защищена докторская диссертация С. Н. Мергеляном.

Официальные оппоненты: академик М. А. Лаврентьев, чл.-корр. АН СССР А. О. Гельфонд, доктор физико-математических наук С. М. Никольский.

РЕЗЮМЕ

Характерной особенностью теории наилучших приближений в комплексной области является то обстоятельство, что на скорость приближения к некоторой функции полиномами в замкнутой области свойство границы области влияют в такой же мере, как и свойства самой функции; имеющиеся результаты в этом направлении (в частности, монография Сэвелла, посвящённая наилучшим приближениям в комплексной области) не дают сколько-нибудь полного представления о влиянии границы на скорость приближения.

Пусть D — конечная область со связным дополнением, совпадающая с множеством внутренних точек своего замыкания, функция $f(z)$ аналитична в D, непрерывна в $\overline{D}$; через $\rho_n(f; D)$ обозначим нижнюю грань чисел

$$\max_{z\in\overline{D}} |f(z) - P_n(z)|$$

по любым полиномам степени n. Класс функций, регулярных в области D, производная которых порядка K удовлетворяет в $\overline{D}$ условию Липшица порядка α $(\alpha > 0)$, обозначим $L(D, K+\alpha)$.

Если граница области D состоит из конечного числа гладких кривых, составляющих между собой углы, внутренние растворы которых не превосходят $\pi\lambda$ $(\lambda \geqslant 1)$, и $f(z) \in L(D, K+\alpha)$, то, при любом $\varepsilon > 0$,

$$\rho_n(f, D) < \frac{C(\varepsilon)}{n^{(K+\alpha)(2-\lambda)-\varepsilon}};$$

отсюда следует, в частности, что если граница D гладкая кривая, то $\rho_n(f, D) < C(\varepsilon)\, n^{-K-\alpha+\varepsilon}$; можно показать, что в классе областей с гладкой границей эта оценка не может быть улучшена.

Аналогичные оценки для $\rho_n(f, D)$ сверху и снизу можно получить при дополнительных предположениях относительно гладкости границы D,

а также в случае областей с угловыми точками, входящими точками алгебраического порядка касания и другими особенностями.

Если $d(\zeta; r)$ означает расстояние линии уровня L_{1+r} функции Грина дополнения к $\overline{D}$ до граничной точки ζ и

$$\liminf \frac{\ln \rho_n(f, D)}{\ln d\left(\zeta; \frac{1}{n}\right)} = A,$$

то $f(z) \in L(B_\zeta; A - \varepsilon)$, где B_ζ — подобласть D, для которой отношение расстояния любой точки $\overline{B}_\zeta$ до ζ к расстоянию той же точки до границы D ограничено сверху для всех точек $\overline{B}_\zeta$, $\varepsilon > 0$ — любое. Таким образом, произвольно медленная скорость приближения гарантирует неограниченную дифференцируемость функции в некоторых граничных точках, если только граница области D имеет соответствующую структуру вблизи этих точек.

В случае наилучшего приближения в двух соприкасающихся областях на скорость приближения влияет, помимо свойств функции и каждой из областей, взаимное расположение соприкасающихся областей вблизи общей точки.

Пусть D_1 и D_2 — две жордановы области с одной общей граничной точкой z_0, а $d(r)$ означает расстояние линии уровня L_{1+r} дополнения к $\overline{D}_1 + \overline{D}_2$ до точки z_0.

Пусть $P_n(z)$ — полином степени n, причём

$$\max_{z \in \overline{D}_1 + \overline{D}_2} |f(z) - P_n(z)| = r(n).$$

Если

$$r(n) < e^{-e^{\frac{1}{d\left(\frac{1}{n}\right)}}},$$

то из сходимости $P_n(z)$ к нулю в D_1 следует, что $P_n(z)$ сходятся к нулю также в D_2, т. е. функция, к которой $P_n(z)$ сходятся в D_1, однозначно определяет ту функцию, к которой при этом $P_n(z)$ могут сходиться в D_2 и которая является «квазианалитическим» продолжением $f(z)$ в D_2.

В случае $A = \infty$ можно дать оценку максимумов модулей $f^{(n)}(z)$ в $\overline{B}_\zeta$, если же $A = 0$, то можно показать, что

$$\omega(\delta) < \text{const.} \min_{n \geqslant 1} \left\{ \rho_n(f, D) + \frac{\delta}{d\left(\zeta; \frac{1}{n}\right)} \right\},$$

где $\omega(\delta)$ означает модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{B}_\zeta$, причём эту оценку, вообще говоря, улучшить нельзя.

Для любой функции $\mu(n) > 0$, удовлетворяющей, при всяком $p > 1$, условию $\lim\limits_{n \to \infty} p^n \mu(n) = \infty$ в конечной области класса Каратеодори D, найдётся функция $f(z)$, для которой граница D является купюрой, однако

$$\rho_n(f, D) < \mu(n).$$